Hermann Günther Grassmann - Leben und die Grassmannschen Gesetze

Gliederung:

1. Lebenslauf

1.1. Kindheit

Hermann Günther Grassmann wurde am 15.04.1809 in Stettin (heute Polen) geboren. Er war das dritte Kind seiner Eltern, und es sollten noch neun Geschwister folgen.
Sein Vater, Justus Günther Grassmann, war Professor für Mathematik an einem Gymnasium. Sein Engagement für das Schulwesen hatte einen wesentlichen Anteil an der hohen Bildungsstufe, die das Schulwesen der Stadt Stettin schon Anfang des 19. Jahrhunderts erreichte.

Hermanns frühe Lebensjahre fallen in die Zeit der tiefsten Erniedrigung des preußischen Staates. Seine Vaterstadt war zum Zeitpunkt seiner Geburt bereits seit drei Jahren in den Händen der napoleonischen Armeen. Der Vater meldete sich freiwillig zu den Waffen, um für die Befreiung seiner Stadt zu kämpfen. Währenddessen verließ die Mutter mit den Kindern bis 1814 Stettin, um zu ihrer verwitweten Mutter nach Greifenhagen zu ziehen. Dort empfing Hermann auch seinen ersten Unterricht von seiner Mutter. In Stettin besuchte Hermann zunächst eine Privatschule, dann aber von der Quinta an, 7½ Jahre lang das vereinigte königliche Stadtgymnasium, an dem auch sein Vater als Professor Mathematik und Physik lehrte.
Aus Grassmanns eigens verfassten Lebensläufen der Jahre 1831 und 1834 ist recht viel über diese Zeit bekannt. Er beschreibt, dass er in den ersten Schuljahren keiner geistigen Anstrengung fähig gewesen sei und keine Begabung gezeigt habe. Auch sei er mit seinem Verstande hinter seinen Mitschülern zurückgeblieben. Er bezeichnete diese ganze Zeit bis zum Jahre 1823 als eine Zeit des Schlummerns, er selbst habe bis dato nur in seinen Träumereien gelebt, die seine geistigen Kräfte unterdrückt hätten. Im Spielen mit Kindern hat sein Vater sein Talent zum Lehrer gesehen. Später „erwachte" Grassmann und seine schulischen Leistungen stiegen rapide an. Alsbald wohnte Grassmann bei seinem Onkel in Stettin und besuchte mit ihm oft die Sternwarte. Während der Schulzeit entwickelte er aber noch keinerlei Neigungen zur Mathematik.

1.2. Jugendjahre

In Berlin studierte Hermann Grassmann mit seinem zwei Jahre älteren Bruder Theologie. In diesem Zusammenhang beschäftigte er sich auch mit der Philologie, um mit Menschen besser umgehen zu können. Er interessierte sich für die griechische Sprache und besuchte auch hier zahlreiche Veranstaltungen. Von den Professoren übte nur einer großen Einfluss auf ihn aus und zwar der Philosoph Schleiermacher. Ansonsten absolvierte Grassmann die weiteren Studienfächer mehr oder weniger als Autodidakt. Bis dato hatte er noch keine mathematische Vorlesung gehört. Mit der Mathematik wollte er erst nach den Philologischen Studien anfangen. 1830 bereitete sich Grassmann auf die Lehramtsprüfung vor. Er studierte nun, wie schon vorher geplant, intensiv Mathematik und verband sie mit der Physik sowie mit der Naturgeschichte. In der Mathematik befasste er sich vornehmlich mit Geometrie und kombinierte sie mit der Arithmetik, um das Visuelle mit dem Geistigen zu verknüpfen. Danach studierte er die Kombinationslehre, benutzte dabei wesentliche Teile der Abhandlungen seines Vaters und befasste sich mit Infinitisemalrechnung. Nachdem er 1831 die Lehramtsprüfung bestand, begann er mit der Lehrtätigkeit, studierte aber nebenbei weiter Mathematik. Erste Ideen seiner Ausdehnungslehre sind bereits hier aus Briefen mit dem französischen Mathematiker de Saint-Venant ersichtlich.

1.3. Berufliche Laufbahn und Arbeiten

1835 nimmt Grassmann an der Berliner Gewerbeschule eine Lehrtätigkeit auf und wird Nachfolger von Steiner. Seiner Bewerbung um Anstellung an der Berliner Universität wurde jedoch nicht entsprochen. Doch es gefiel ihm nicht in Berlin, und er sehnte sich nach Stettin zurück. Anfang 1836 übersiedelte H. Grassmann wieder nach Stettin und erhält hier eine Anstellung an der Ottoschule für ein Salär von 500 Talern. Doch auch hier gefällt es ihm nicht. Ungeachtet dessen beschäftige er sich mit Freude mit der Chemie und schrieb zunächst eine wissenschaftliche Abhandlung über Kristallgestalten.
1838 absolvierte er die zweite theologische Lehramtsprüfung und bat um eine weitere Lehramtsprüfung für Mathematik und Physik. Seine Aufgabe war es dabei, eine Ausarbeitung

über die „Theorie von Ebbe und Flut“ anzufertigen. Gerade aus dieser Arbeit schöpfte Grassmann eine Vielzahl seiner mathematischen Ideen für die Ausdehnungslehre, die im Jahre 1844 entstand. Die Beschäftigung mit Ebbe und Flut gab den Anstoß zur Wiederaufnahme und Weiterbildung des aus dem Jahre 1832 stammenden Kalküls und hat damit die Entstehung der gesamten Ausdehnungslehre veranlasst. Es geht aus diesen Arbeiten auch hervor, dass er sich in der Zeit von 1831 und 1839 sehr stark mit Mathematik beschäftigt haben muss, da er über hohe Fähigkeiten in der Infinitisemalrechnung verfügte.
Das Zeugnis, das Grassmann in Berlin erhielt, war exzellent, dennoch blieb er in Stettin an der Ottoschule und wechselte nicht an die neue höhere Bürgerschule, die am 15.10.1840 unter dem Namen „Friedrich-Wilhelm-Schule“ in Stettin eröffnet wurde.
Im Jahr 1840 bekam er durch den Magistrat die letzte ordentliche Stelle am Gymnasium, doch 1843 trat er nach einem genehmigten Tausch an die „Friedrich-Wilhelm-Oberschule“ über, wo man ihm 525 Taler bezahlte.
1844 entwickelte er dann „Die Wissenschaft der extensiven Größen oder die Ausdehnungslehre“, ein Werk, das allein eigentlich schon genügen würde, seinem Verfasser einen dauernden Platz in der Geschichte der Mathematik zu sichern. Doch dieses Buch war seiner Zeit sehr weit voraus und ist selbst heute nicht einfach zu verstehen. Grassmann ging völlig neue Wege, indem er die gesamte Geometrie formalisierte. So fand das Buch nirgends Beachtung und wurde in der Öffentlichkeit totgeschwiegen, was ein schwerer Schlag für Grassmann war. Auch Möbius, ein guter Freund Grassmanns, fühlte sich außerstande, die gesamte Ausdehnungslehre durchzuarbeiten. Doch Grassmann arbeitete unermüdlich weiter und veröffentlichte 1845 in Poggendorffs Analen die „Neue Theorie der Elektrodynamik“.
1847 erhielt er den Titel eines Oberlehrers. Grassmann arbeitete 1848 als Redakteur einer politischen Zeitung da er auch das gesellschaftliche Leben mit Aufmerksamkeit verfolgte.
Er verlobte sich 1848 mit Marie Therese Knappe und heiratete sie am 12.04.1849. Dazu ist es interessant zu bemerken, dass seine Frau fast 15 Jahre jünger als er war, und Grassmann, bereits 40, auf der Hochzeit eine Perücke trug.
Grassmann führte nun erste Sprach- und Sanskritstudien durch. 1853 veröffentlicht er die „Theorie der Farbenmischung“ und bald danach die Vokaltheorie er beschäftigte sich nebenbei auch mit Tonhöhen und Musik. Grassmann wurde nach dem Tode seines Vaters auch dessen Nachfolger am Gymnasium und erhielt den Professorentitel. Seine materielle Lage hatte sich bis dato stetig verbessert. So bekommt er nun 1250 Taler.
Der Physiker Helmholtz erkannte 1854 die Richtigkeit der Grassmannschen Studien zur Farbenlehre an, soweit es sich um die Schwerpunktkonstruktionen handelte. Jedoch die Kreisform des Farbenfeldes sah er noch nicht als erwiesen an.
Im Jahre 1855 arbeitete Grassmann an der Neuauflage seiner Ausdehnungslehre, und reiste während dieser Zeit durch die Schweiz. 1862 wurde „Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form“ veröffentlicht. Sie hatte eine Auflage von 300 Exemplaren. Die gesamten Kosten der Herausgabe musste Grassmanns selbst tragen. Das Werk war bereits 1861 fertig. Doch die Form der Darstellung wie Grassmann selbst sagte: „die strengste mathematische Form, die wir überhaupt kennen, die Euklidische“ war zweifellos ein verhängnisvoller Missgriff für die Verständlichkeit dieser Abhandlung und so fand auch dieses Buch keinerlei Anhänger. Diese Ausgabe hatte noch weniger Erfolg als die erste. Grassmann bewarb sich nun an der Preußischen Universität um einen Lehrstuhl für Mathematik, jedoch ohne Erfolg. In der Folge widmete er sich intensiv sprachwissenschaftlichen Studien.

Typisch für Grassmann war, dass er sich in seinem Leben des öfteren von seinem Spezialgebiet – der Mathematik – entfernte, um dann allerdings immer wieder zu ihr zurückzukehren. Im Rahmen seiner sprachwissenschaftlichen Studien erstellte er ein Wörterbuch und eine Übersetzung zum „Rig Veda“. Des Weiteren arbeitete an Werken über die Botanik, z.B. „Deutsche Pflanzennamen“. Auch den Hang zur Theologie verlor er nie vollständig.

1.4. Zusammenfassung von Grassmanns Lebenswerk

Seine neuen Erkenntnisse in der Mathematik wurden zu Lebzeiten nicht erkannt, und es brauchte ein Jahrhundert, bis man ihre Bedeutung erfasste.

Neben der linearen Algebra und Geometrie gibt es noch zwei andere Beiträge von Grassmann zur Mathematik, die genannt werden müssen. In einem Text zur Mathematik, den er 1861 veröffentlichte, definierte er arithmetische Operatoren für die ganzzahlige Induktion, und bewies ihre Eigenschaften: Kommutativität, Assoziativität und Distributivität. Er kam weiterhin in den wichtigsten Punkten Peanos Axiomen der Natürlichen Zahlen zuvor, die erst 28 Jahre danach veröffentlicht wurden.

Peano gab dies auch zu, aber im Namensspiel der Geschichte, bei der Erfolge Leuten zugeschrieben wurden, war Peano der Gewinner und Grassmann ein Verlierer. Dedekind, der ein gleichartiges Theorem der Natürlichen Zahlen 1888 aufstellte erwähnt ebenfalls nirgendwo den Namen Grassmann.

Ein Kennzeichen von Grassmanns wissenschaftlichen Arbeiten, und damit war er seiner Zeit weit voraus, ist die Tendenz der Benutzung impliziter Definitionen, bei denen sich ein mathematisches Konstrukt eher durch seine formalen Eigenschaften auszeichnet als durch eine explizite Bescheibung.

So kommt er z.B. in der Ausdehnungslehre von 1844 fast zur abstrakten Notation eines assoziativen Ringes. Es fehlte, um die Lehre zu perfektionieren, die geeignete Sprache der Mengenlehre. Erst 1915 wurde dann die erste formale Definition eines Ringes von Fränkel gegeben.

Grassmann schrieb an vielen anderen Themengebieten, z.B. Elektrizität, Akustik, Linguistik, Botanik und natürlich Farbe.

Im Alter von 53 Jahren wurde er allmählich durch das verbreitete Desinteresse an seinen mathematischen Ideen entmutigt, und so wandte er sich der Heiligen Schrift zu. Sein Sanskrit Wörterbuch ist immer noch weit verbreitet.

Für seine Arbeit in Philologie erhielt er in seinem letzten Lebensjahr einen Doktor ehrenhalber.

Grassmann starb am 26.09.1877 und hinterließ sieben Kinder, vier weitere waren bereits in jungen Jahren gestorben.

Er hatte sich bis kurz vor seinem Tode mit wissenschaftlichen Arbeiten über Physik, Mathematik und Theologie beschäftigt. Auch wenn seine Krankheit mit großen Leiden verbunden war, tröstete ihn, dass am Ende seines Lebens die ersten Mathematiker sich mit seiner Ausdehnungslehre zu befassen begannen und ihre Fundamentalität allmählich erkannt wurde.

Eine für die Bildverarbeitung aufschlussreiche Ausarbeitung Grassmanns trägt den Namen „Zur Theorie der Farbenmischung“.

2. Die Grassmannschen Gesetze

2.1. Die verbale Beschreibung

Zum Theoriebegriff:

Eine naturwissenschaftliche Theorie ist eine sorgfältige Aus- und Aufarbeitung von experimental ermittelten Ergebnissen. Ausgehend von experimentell bestätigten Fakten werden zunächst Postulate formuliert. Mit deren Hilfe und der Hilfe von bekannten Prinzipien werden dann neue Erkenntnisse logisch gefolgert. Dabei muss die Verbindung zwischen Ausgangssituation und Resultat immer ersichtlich bleiben, was durch die Schaffung eines Formalismus erreicht werden kann.

Ein Modell einer Theorie ist ein mathematisches System, dass dazu benutzt wird, die Theorie auf eine formale und gleichzeitig inhaltlich analoge Art zu repräsentieren.

In seiner „Optik" hat Newton mit Hilfe von mathematischen Modellen versucht, Farbeindrücke zu klassifizieren und zu erklären wie sie sich in Verbindung mit Helligkeitsschwankungen verhalten. Die Idee von Newton war gut, aber es war notwendig, dass das Modell im Detail präzisiert wurde. Es stand die Aufgabe, die Prinzipien wie oben beschrieben zu formalisieren und die notwendigen Schlüsse daraus herzuleiten. Ziel war es, eine Theorie für die Farbmessung zu konstruieren, mit der man auch rechnen konnte.

Mit dieser Aufgabe hat sich Hermann Grassmann (1809 – 1877), Gymnasialprofessor für Mathematik in einem Stettiner Gymnasium, in einer Abhandlung 1853 „Zur Theorie der Farbenmischung" beschäftigt.

Grassmann wurde angeregt, sich mit der Farbenlehre intensiver zu beschäftigen durch einen Artikel von Helmholtz, in welchem Helmholtz daran arbeitete, welche Farben zusammen vermischt Weiß ergeben (Komplementärfarben). Doch Helmholtz fand nur die Komplementärfarben Gelb und Indigo. Er bevorzugte die Idee, man benötige, um Weiß zu produzieren, mindestens drei Spektralfarben. Grassmanns Artikel spricht dagegen von unendlich vielen Komplementärfarben.

Um seine Farbentheorie aufstellen zu können, hat Grassmann folgende Begrifflichkeiten für Farben verwendet (Die Begrifflichkeiten wurden aus einem italienischen Text übersetzt und können von den originären abweichen):

Grundfarben: Rot, Gelb, Grün, Blau (Spektralfarben)

Intensität der Farbe

Intensität des Weißtons

Daraus werden zwei weitere Größen definiert:

Totalintensität = Farbintensität + Weißintensität

Sättigung = Intensität der Farbe / Totalintensität

2.1.1. (1. Grassmannsches Gesetz): Jeder Farbeindruck wird von drei Grundgrößen vollständig beschrieben: Grundfarbe (Spektralfarbe), Farbintensität und Weißintensität.

2.1.2. (2. Grassmannsches Gesetz): Verändert man einen Farbton stetig und vermischt diesen mit einer zweiten Farbe, die man aber unverändert lässt, so ändert sich auch der Farbton - der daraus durch additive Farbmischung entsteht – stetig.

2.1.3. (3. Grassmannsches Gesetz): Der Farbton einer durch additive Farbmischung entstandenen Farbe hängt nur vom Farbeindruck der Ausgangsfarben, nicht jedoch von deren physikalischen (spektralen) Zusammensetzungen ab.

2.1.4. (4. Grassmannsches Gesetz): Die Totalintensität einer additiven Farbmischung ist die Summe der Totalintensitäten der an ihr beteiligten Farben.

2.1.5. Ausführungen

Die Grassmannschen Gesetze, die aus experimentellen Untersuchungen hergeleitet wurden, bieten die Grundlage für weitere Erkenntnisse der Farbmessung. Sie gelten für die additive Farbmischung, können aber auf die subtraktive Farbmischung erweitert werden.

Zum 1. Grassmannsches Gesetz: Jeder Farbeindruck wird von drei Grundgrößen vollständig beschrieben: Grundfarbe (Spektralfarbe), Farbintensität und Weißintensität

Das ersten Postulat sagt aus, dass es notwendig und hinreichend für die Beschreibung eines Farbtons ist, drei Grundgrößen festzulegen, die aber voneinander unabhängig sein müssen. Schon Newton hatte festgestellt, dass jede Farbe (Spektral- und Nichtspektral) beschrieben werden kann als eine Mischung aus einer gewissen Anzahl von Spektralfarben zusammen mit einem Weißheitsgrad. Die drei Größen, die eine Farbe vollständig beschreiben, sind für Newton dieselben wie für Grassmann: **Farbton**, also die einzige Spektralfarbe, die zusammen mit dem Weißton den Basisfarbwert (ohne Aussage über Intensität) gibt, die **Farbintensität** und die **Weißintensität,** auch als Helligkeit bezeichenbar.

Die verschiedenen Grundfarben bilden einen Spektralkreis, der alle Farben enthält, die nach Newton nicht mehr zerlegbar sind oder nach Grassmann eine feste Wellenlänge haben (trotzdem spricht man von Farben mit genau einer *Frauenhoferschen* Linie).

Hier begeht Grassmann einen Fehler, der aber die Theorie nicht ungültig macht, indem er die beiden enden Rot und Violett als gleich beurteilt (wie auch schon Newton). Er nennt die Zwischenfarbe Purpur und schließt so den Kreis.

In Wirklichkeit, wie Helmholtz zeigte, haben die beiden „Enden“ des Farbenkreises (Rot und Violett) nicht denselben Farbwert und keines von beiden ist Purpur. Dies entsteht vielmehr durch die additive Mischung von Rot und Violett. Dieser Fehler führte bei Newton als auch bei Grassmann zu Folgefehlern in der Komplementärfarbenerklärung. Dieser Fehler blieb bei Grassmann aber für das erste Postulat ohne Konsequenten. Er führte den dreidimensionalen Raum für die Farben ein, mit den drei Grundgrößen, die linear unabhängig sein müssen. Die Begriffe der linearen Unabhängigkeit und der Dimension hat Grassmann auch schon in der vorhergehenden Arbeit „Die Ausdehnungslehre" verwandt. Die drei Grunddimensionen sind natürlich wieder Farbton, Farbintensität und Weißintensität.

Zum 2. Grassmannsches Gesetz: Verändert man einen Farbton stetig und vermischt diesen mit einer zweiten Farbe, die man aber unverändert lässt, so ändert sich auch der Farbton - der daraus durch additive Farbmischung entsteht - stetig

Für Grassmann bedeutet diese stetige Änderung der Grundfarbe, dass sich die Wellenlänge stetig verändert und außerdem, dass, wenn das obere Ende erreicht wird (Rot) automatisch zum unteren Ende (Violett) „gesprungen" wird. Der Abschnitt vom Violetten zum Roten über Purpur ist für das Auge stetig.

Ein stetig veränderter Farbeindruck entsteht also immer dann, wenn man die Farbintensität, die Weißintensität und - bei Farbintensität ungleich null - den Grundton ändert. Wenn die Farbintensität gleich null ist, so verändert sich der Farbeindruck durch Änderung der Weißintensität auch dann stetig, wenn die Grundfarbe nebenbei zwischen ganz verschiedenen Wellenlängen variiert. Grassmann sagt dazu, dass auch dies experimentell nachgewiesen werden konnte.

Im Unterschied zu Newton, der zwar sieben Grundfarben beschrieb, aber eigentlich zwei bevorzugte und gleichsetzte, definiert Grassmann den Übergang von Violett zu Rot nur als für stetig, um den Farbenkreis schließen zu können. Für einen Beobachter stellt sich dieser Übergang tatsächlich als stetig dar. Offensichtlich kann man den Farbenkreis durch Definition von verschiedenen Zwischenfarben zwischen Rot und Violett schließen, wobei Purpur nur eine von vielen Farben dieses Bereiches darstellt. Damit lässt sich das Postulat experimentell bestätigen.

Zum 3. Grassmannsches Gesetz: Der Farbton einer durch additive Farbmischung entstandenen Farbe hängt nur vom Farbeindruck der Ausgangsfarben, nicht jedoch von deren physikalischen (spektralen) Zusammensetzungen ab.

Dieses dritte Postulat ist von großer Wichtigkeit, denn es erlaubt, von den physikalischen Eigenschaften des Lichtes zu abstrahieren und einfach über Farben zu sprechen. Es hat Grassmann erlaubt, die Farben als Grundgrößen zu interpretieren und ihre Mischung als Summe dieser zwei Größen. Es hat schon Newton verwundert, dass zwei scheinbar gleiche Farben doch verschiedene Spektralverteilungen haben können. Zum Beispiel soll Farbe M durch eine Mischung von Farbe A und B entstehen, als auch M' durch eine Mischung von C und D. Die zwei Farben M und M' sollen gleich auszusehen, aber verschiedene Spektrallinien haben. Man nennt diese Farben metamäre Farben.

Man kann sich nun Fragen, ob zwei metamäre Farben - also solche mit gleichem Farbeindruck aber verschiedenen Spektrallinien - bei Mischung mit einer dritten Farbe dieselbe Farbe ergeben, oder - ob im Gegensatz dazu die neue Farbe von der spektralen Zusammensetzung der Ausgangsfarben abhängt. Die Antwort, die das Experiment dazu liefert besagt, dass die neue Farbe unabhängig von den spektralen Zusammensetzungen der Ausgangsfarben ist und nur von deren Farbeindrücken abhängt.

Zum 4. Grassmannsches Gesetz: Die Helligkeitsintensität einer durch additive Farbmischung entstandenen Farbe ist die Summe der Helligkeitsintensitäten der Farben aus denen sie entstanden ist.

Das bedeutet, dass sich die Helligkeit von zwei verschiedenen Farben bei Mischung additiv verhält. Dieses vierte Postulat ist auch bekannt unter der „Additivität der Helligkeit“ und als das Abneysche Gesetz. Heute weiß man, dass diese Erkenntnis nur für ein paar besondere Fälle zutrifft, gerade die, die Grassmann betrachtete. Die Formel versagt bei sehr geringen Helligkeiten, genau dann, wenn das Zapfensehen durch das Stäbchensehen abgelöst wird. Auch Grassmann meinte dazu inhaltlich:

„Dieses Gesetz ist nicht so sehr fundamentiert wie die vorhergehenden, aber aus theoretischen Überlegungen scheint es recht sinnvoll zu sein es anzunehmen.“

Heute, mit Hilfe von Helmholtz, wird diese Annahme dazu benutzt, die Luminanz zu definieren, das ist die photometrische Größe, die mit der radiometrischen Größe Radianz korrespondiert. Seine Begründung liegt darin, dass der Sehapparat nicht gleich empfindlich für unterschiedliche Spektralwerte ist. Dafür ist aber wie gesagt die Luminanz additiv, also:

$$L(P1 + P2) = L(P1) + L(P2)\ .$$

Für Grassmann ist die Totalintensität die Summe der Farbintensität und der Weißtonintensität. Wie der Wissenschaftler MacAdam bekanntgab, ist der Begriff Intensität „nur für Punktquellen anwendbar, nicht aber für ausgedehnte Gebiete von Farbe und für das, wovon Grassmann spricht“.

2.2. Die mathematische Beschreibung

Grassmanns (1853) Gesetze besagen, dass sich additive Farbmischung als positive Halbgruppe mit Aufhebungseigenschaft und Intensitätsveränderungen als skalare Vektormultiplikation auffassen lassen:

2.2.1. Definition 1: Eine *Grassmann-Struktur* ist ein Quadrupel $(A, \oplus, *, \sim)$, wobei A eine Menge, $\oplus$ eine Abbildung auf $A \times A$, $*$ ein Abbildung auf $\Re^+ \times A$ und $\sim$ eine **binäre** Relation auf A ist, die die Axiome 1 - 5 erfüllt.

2.2.1.1. $(A, \oplus)$ ist eine kommutative Halbgruppe mit Aufhebungseigenschaft, d.h., für alle $a, b, c \in A$ gilt:

2.2.1.1.1. $a \oplus b \in A$

2.2.1.1.2. $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

2.2.1.1.3. aus $a \oplus c = b \oplus c$ folgt $a = b$

2.2.1.1.4. $a \oplus b = b \oplus a$

Also: Die additive Mischung von Farben, experimentell realisierbar beispielsweise durch Übereinanderprojizieren zweier Farben a, b, c aus der Menge der Farben A, erfüllt die Bedingungen für eine kommutative Gruppe mit Aufhebungseigenschaft, d.h. Addition macht Sinn.

2.2.1.2. $*$ ist eine Skalarmultiplikation auf $(A, \oplus)$, d.h., für alle $(a, b \in A)$ und alle $t, u \in \Re^+$ gilt:

2.2.1.2.1. $t * a \in \Re^+$;

2.2.1.2.2. $t * (u * a) = (t * u) * a$;

2.2.1.2.3. $t * (a \oplus b) = (t * a) \oplus (t * b)$

2.2.1.2.4. $(t + u) * a = (t * a) \oplus (u * a)$

2.2.1.2.5. $(1 * a) = a$

Also: Die Multiplikation mit einer skalaren Konstanten t lässt sich als skalare Multiplikation auf $(A, \oplus)$ beschreiben; es handelt sich dabei um die Variation der Intensität (Helligkeit) eines Farbreizes.

2.2.1.3. Gesetz der *Äquivalenz*: ~ ist eine Äquivalenzrelation auf ***A***, d.h., für alle ***a, b, c*** $\in$ ***A*** gilt:

2.2.1.3.1. ***a ~ a***

2.2.1.3.2. wenn ***a ~ b***, dann ***b ~ a***;

2.2.1.3.3. wenn ***a ~ b*** und ***b ~ c***, dann **a ~ c**.

Also: Dieses Gesetz befasst sich mit der Metamerierelation ~, die empirisch Farbmatches entspricht. Farben lassen sich dementsprechend als *Äquivalenzklassen subjektiv gleichartiger Farbreize* - ausgedrückt durch die Relation ~ - definieren.

2.2.1.4. Gesetz der *Additivität*: Für alle ***a, b, c*** $\in$ ***A*** gilt

a ~ b gdw. a $\oplus$ ***c ~ b*** $\oplus$ ***c***

Dieses Gesetz, auch als ***drittes Grassmannsches Gesetz*** bekannt, beschäftigt sich mit der Verträglichkeit von $\oplus$ und ~: Die Metamerierelation zwischen zwei Farben bleibt auch dann erhalten, wenn zu beiden eine jeweils gleiche dritte Farbe hinzugemischt wird.

Andere Interpretation:

Eine Mischung aus zwei Farben C1 und C2 kann dargestellt werden als Linearkombination aller zwei Farbentripel, die jeweils zu C1 und C2 metamer sind. (Gilt auch für beliebig viele „Quell"-Farben) .

C3(C3) = C1(C1) + C2(C2) = [R1+R2](R) + [G1+G2](G) + [B1+B2](B)

2.2.1.5. Gesetze der *skalaren Multiplikation*: Für alle ***a, b*** $\in$ ***A*** und alle ***r*** $\in \mathfrak{R}$ gilt:

wenn ***a ~ b***, dann ***r * a ~ r * b***

Dieses Gesetz beschäftigt sich mit der Verträglichkeit von $\ast$ und ~. Die Metamerierelation zwischen zwei Farben bleibt auch dann erhalten, wenn die Intensität beider Farben um den gleichen relativen Betrag erhöht/verringert wird.

2.2.1.6. Gesetze der *Trichromatizität*, das sogenannte ***erste Grassmannsche Gesetz***:

2.2.1.6.1. Zu allen $\boldsymbol{a_0, a_1, a_2, a_3 \in A}$ existieren $\boldsymbol{r_0, r_1, r_2, r_3, u_0, u_1, u_2, u_3 \in R^+}$ mit $\boldsymbol{r_i \neq u_i}$ für wenigstens ein $\boldsymbol{i \in \{0, 1, 2, 3\}}$, sodass gilt:

$$\bigoplus_{i=0}^{3} r_i * a_i \sim \bigoplus_{i=0}^{3} u_i * a_i$$

Werden die *selben* vier Farben in *unterschiedlichen* Verhältnissen gemischt, lassen sich dennoch immer verschiedene Mischungsverhältnisse finden, die dennoch metamere Reize bilden (d.h. bei vier Farben gibt es immer verschiedene Möglichkeiten, sie zu einer bestimmten Farbe zu kombinieren).

2.2.1.6.2. Es existieren beliebige Reize $\boldsymbol{a_1, a_2, a_3 \in A}$, so dass für beliebige $\boldsymbol{r_1, r_2, r_3, u_1, u_2, u_3 \in R^+}$ unter der Bedingung

$$\bigoplus_{i=1}^{3} r_i * a_i \sim \bigoplus_{i=1}^{3} u_i * a_i \text{ folgt, daß } r_1 = u_1,\ r_2 = u_2,\ r_3 = u_3.$$

Also: Metamerie einer Mischung aus drei Farbreizen lässt sich nur bei gleichem Mischungsverhältnis erzeugen, d.h. bei drei Farben gibt es genau eine einzige Möglichkeit, diese so zu mischen, dass deren Mischung zu einer bestimmten anderen Farbe metamer ist.

Eine Menge $\boldsymbol{\{a_1, a_2, a_3\}}$, die die Bedingung (6b) erfüllt, nennt man *Basis* oder auch *Menge der Primärfarben*.

Anders ausgedrückt: Jede Farbe C kann dargestellt werden als Linearkombination von drei anderen Farben z.B. RGB, die aber nicht untereinander darstellbar sein dürfen.

C = Rc (R) + Gc (G) + Bc(B)

2.2.1.7. Gesetz der stetigen Farbtonveränderung bei stetiger Quellfarbänderung, das sogenannte ***zweite Grassmannsche*** Gesetz wird hier nicht noch mal extra in mathematischer Form angegeben. Es folgt aus der Eigenschaft der Stetigkeit einer Funktion, die als Linearkombination aus stetigen Summandenfunktionen, hier die stetige Änderung der Grundgrößen, gebildet wird.

2.2.1.8 Das ***vierte Grassmannsche Gesetz***:

L(A+B) = L(A) + L(B),

wobei L die Totalintensität eines Farbeindrucks darstellt.

2.2.2. Theorem 1 (Repräsentationssatz): Sei $(A, \oplus, *, \sim)$ eine Grassmann-Struktur. Dann existieren ein Vektorraum *V* über $\mathfrak{R}$, ein konvexer Kegel $C \in V$ und eine Abbildung ϕ von *A* nach *C*, so dass für alle $a, b \in \mathfrak{R}^+$ ***und*** $v \in V$ gilt:

2.2.2.1. $\phi(a \oplus b) = \phi(a) + \phi(b)$

2.2.2.2. $\phi(r * a) = r * \phi(a)$

2.2.2.3. $a \sim b$ genau dann, wenn $\phi(a) = \phi(b)$

2.2.2.4. es existieren $c, d \in A$, sodass $v = \phi(c) - \phi(d)$

Die Abbildung ϕ ist ein Homomorphismus der Grassmann-Struktur $(A, \oplus, *, \sim)$ auf $(C, +, \bullet, =)$, wobei *C* ein konvexer Kegel in *V* ist;

die Eigenschaft 2.2.2.4 garantiert dabei, dass es sich bei *V* um einen minimalen Vektorraum handelt, da sich jedes Element von *V* als Differenz von Elementen $\phi(c)$ und $\phi(d)$ aus *C* erzeugen lässt.

2.2.3. Theorem 2 (Eindeutigkeitssatz): Sei $(A, \oplus, *, \sim)$ eine Grassmann-Struktur mit zwei Homomorphismen ϕ, ϕ' auf konvexen Kegeln *C*, *C'* in den Vektorräumen *V*, *V'*, die die Bedingungen 1-4 des Theorems 1 erfüllen. Dann existiert eine nichtsinguläre Abbildung *T* von *V* auf *V'*, so dass für alle $a \in A$ gilt:

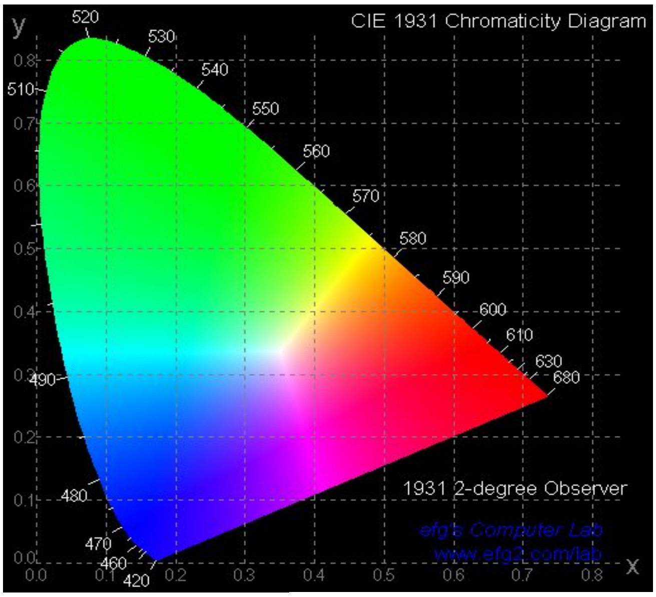
$$T(\phi(a)) = \phi'(a).$$

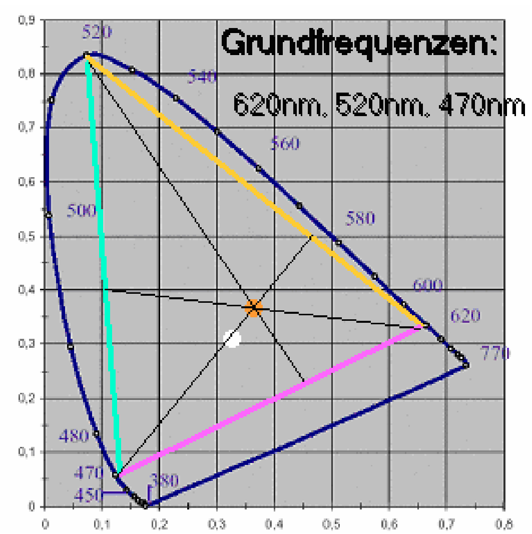
Die Abbildung ϕ ist eindeutig bis auf nichtsinguläre lineare Transformationen.

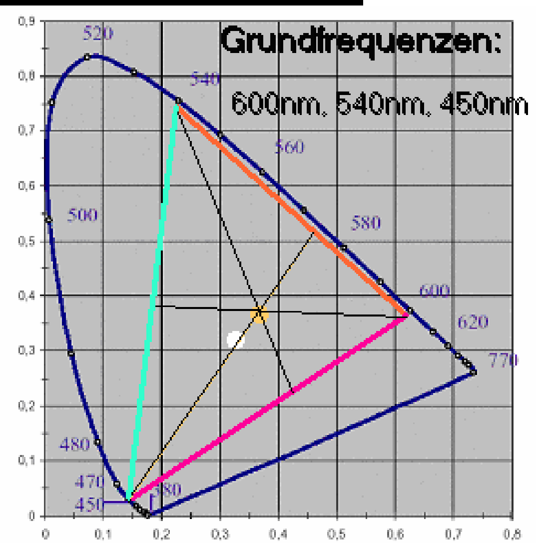
2.3. Beispiele und Erläuterungen zu 2.2.:

Beispiel im CIE – Farbraum (hier ein 2-D Ausschnitt) für 3 Farben gleicher Valenz und mit unterschiedlichen Spektralanteilen:
Farbraum:

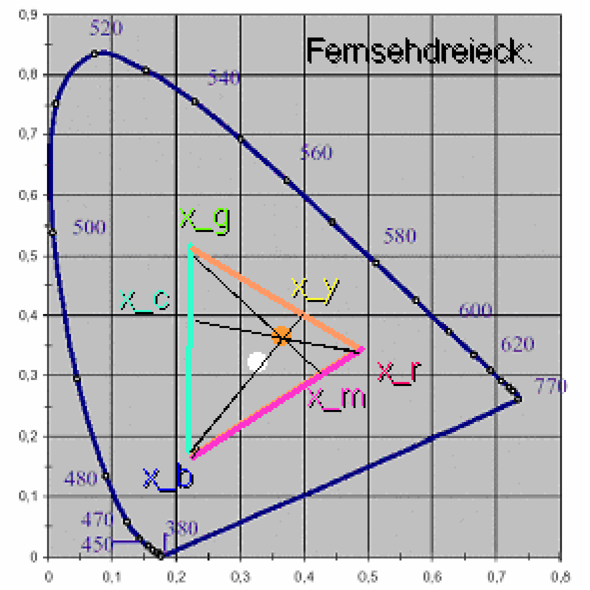
(Bild1)







Oben (Bild 2 und 3): Teile der Farbräume die durch 3 Spektralfarbwerte erzeugt wurden (Dreiecksfläche).
Unten: Fernsehdreieck, nicht durch Spektralfarben erzeugt, alle 3 Farbräume haben eine nichtleere Schnittmenge (das Fernsehdreieck).
Gemeinsame mögliche Farbwerte sind visuell und durch Mischungen nicht mehr unterscheidbar (hier Hellorange als Beispiel).



(Bild 4)

2.3.1. Erklärung zur Definition 1

2.3.1.1. Axiom: Der Farbraum ist darstellbar als kommutative Halbgruppe mit Aufhebungseigenschaft

2.3.1.1.1. Abgeschlossenheit: Alle Farben, die durch Kombination von x_r, x_g und x_b entstehen, bleiben im Farbraum und verlassen diesen (hier die Ebene für x_r + x_g + x_b = const.) nicht

Bsp.: x_r kombiniert mit x_g ergibt die Gelblinie, die wieder innerhalb des Dreiecks liegt.

2.3.1.1.2. Assoziativität (Bsp): Der Farbton hängt nicht davon ab, ob man sich erst den Punkt x_y auf der Gelblinie f(x_r, x_g) sucht und diesen bis zu einem bestimmten Abstand mit dem Blaupunkt x_b verbindet oder den Punkt x_r mit dem Punkt auf der Cyanlinie x_c = f'(x_g,x_b). Sie sind sogar spektral identisch.

2.3.1.1.3. Eindeutigkeit: Klar, da der Farbraum drei Dimensionen hat und im hiesigen Falle von drei verschiedenen Grundfarben, also drei voneinander linear unabhängigen Farbvektoren, die den Farbraum erzeugen, es zu jedem Punkt ein eindeutiges Linearprodukt aus den drei Farbvektoren gibt.

2.3.1.1.4. Bsp.: Rot mit Gelb vermischt ergibt dieselbe Farbvalenz wie Gelb mit Rot gemischt.

2.3.1.2.1. Bsp.: Man erhöht die Helligkeit eines Farbwertes und erhält wieder einen gültigen Farbwert.

2.3.1.2.2. Assoziativität: Bei der verketteten Veränderung eines Farbwertes spielt es keine Rolle, ob man zweimal hintereinander die Farbvalenz verändert oder erst das Produkt beider Skalare auf die Farbvalenz in einem anwendet.

2.3.1.2.3. Distributivität (1): Verändert man eine Farbvalenz mit einem Skalar, so erhält man die gleiche Farbvalenz, wenn man ihre Komponenten (z.B. spektralzerlegt) mit dem Skalar getrennt verändert und im anschliessend wieder vermischt.

2.3.1.2.4. Distributivität (2): Beide Skalare zusammenaddiert, verändern die Farbvalenz im gleichen Masse wie die Summe der mit beiden Skalaren getrennt voneinander manipulierten Farbvalenzen.

Bsp.: Grün zweimal aufgehellt ergibt denselben Wert wie Grün einmal aufgehellt und mit noch einem aufgehellten Grün vermischt.

2.3.1.2.5. Neutrales Element: Es gibt ein neutrales Element, d.h. eine Bearbeitung mit einem Skalar, das die Farbvalenz nicht verändert.

2.3.1.3. Metameirerelation:

2.3.1.3.1. Reflexivität: jede Farbe ist zu sich selbst metamer

2.3.1.3.2. Symmetrie: wenn a zu b metamer, dann auch b zu a.

2.3.1.3.3. Transitivität: Bedeutet mit 3.1. und 3.2. dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt, also dass man Äquivalenzklassen bilden kann zwischen den Linearprodukten aus den Farbkomponenten und damit aus metameren Farben.

Bsp.: Seien drei Farbvalenzen a,b,c gegeben. Sei

a zusammengesetzt aus den Einzelkomponenten
a1*680 nm, a2*520 nm und a3*440 nm

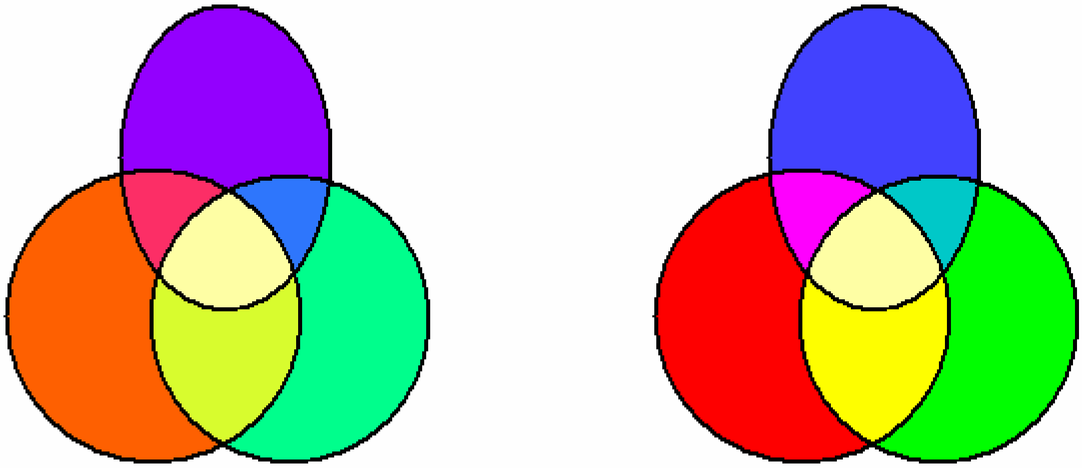
b zusammengesetzt aus den Einzelkomponenten
b1*650 nm, b2*500 nm und b3*420nm

c zusammengesetzt aus den Einzelkomponenten
c1*670 nm, c2*510 nm und c3*430nm,

so kann man sagen, wenn a zu b metamer und b zu c, dann müssen auch a und c metamere Farben sein.

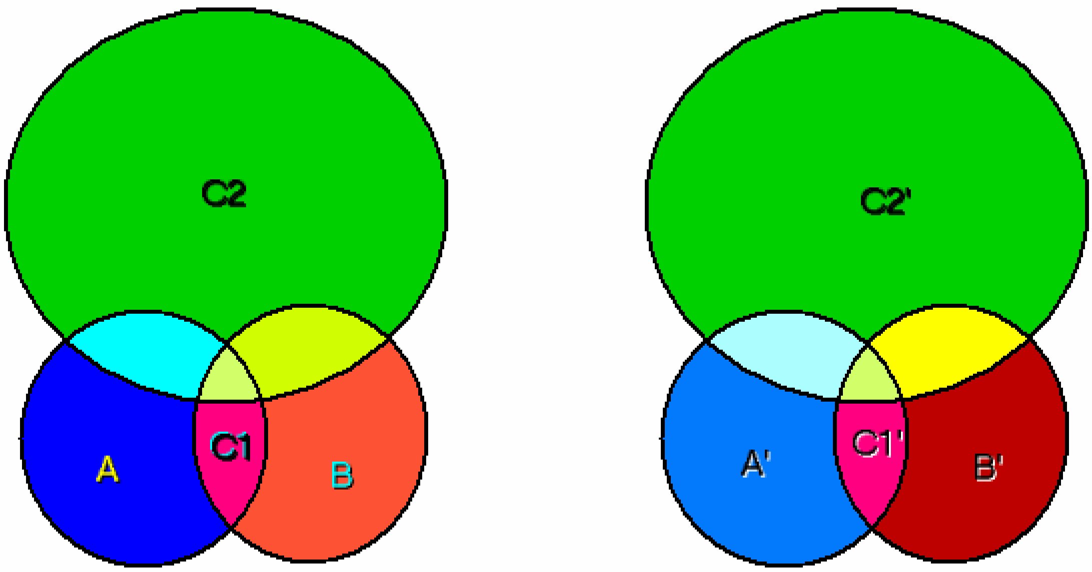
2.3.1.4. (Additivität): Zwei zueinander metamere Farbvalenzen, egal aus welchen Komponenten sie gebildet wurden, bleiben bei der Hinzumischung einer weiteren, in beiden Fällen gleichen Komponente, zueinander metamer -
3. Grassmannsches Gesetz.

Bsp.1: zwei zueinander metamere Farben (Zentrum), die aus unterschiedlichen Komponenten bestehen (außen):



Bsp.2: Orange, einmal bestehend aus 620 nm, 520 nm und 470 nm und im zweiten Fall aus 600 nm, 540 nm und 470 nm sollen dieselben Farbvalenzen haben (siehe Bild 2 und 3) . Mischt man nun die Spektralfarbe der Wellenlänge 460 nm hinzu, so soll in beiden Fällen das gleiche Weiß entstehen (Bild 2 und 3 Weißpunkt) .

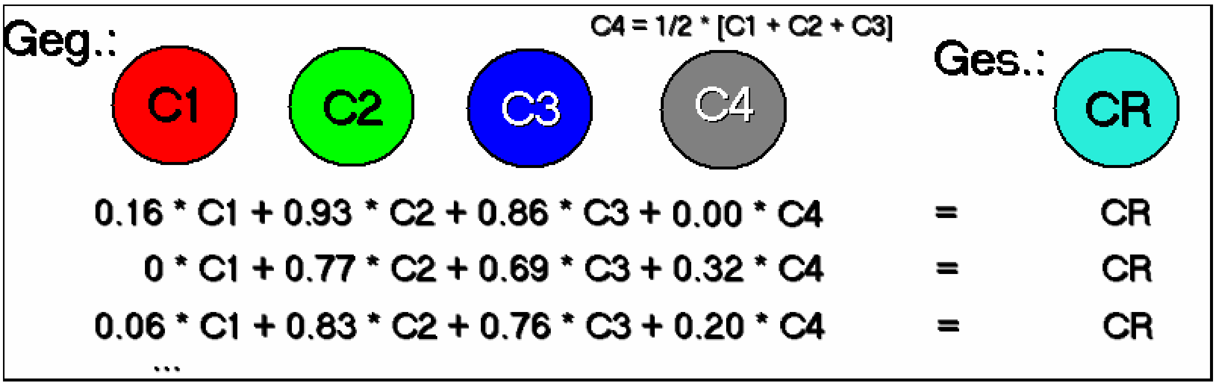
Bsp.3:



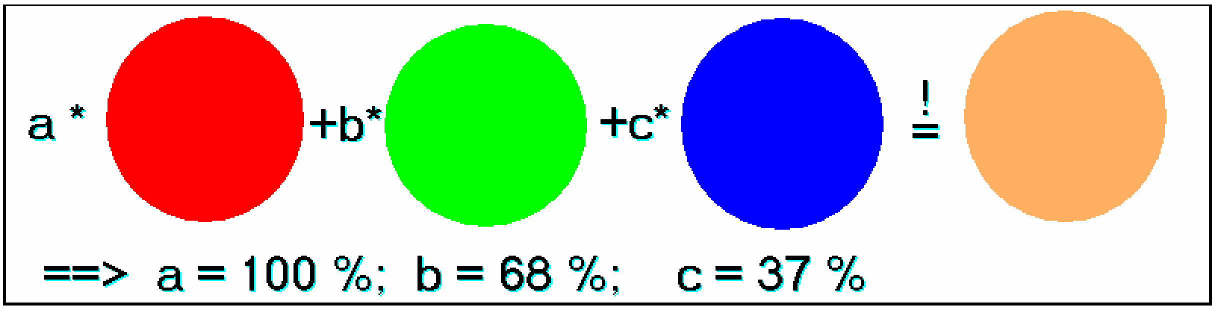
Farbe C1 ist metamer zu C1', C2 zu C2' sie bestehen aber aus anderen Komponenten.
Mit C2 bzw. C2' vermischt ergeben C1 bzw. C1' aber wieder metamere Farbtöne.

2.3.1.5. (skalare Multiplikation): Zwei zueinander äquivalente Farbwerte bleiben auch nach Intensitätsveränderung der Einzelkomponenten um den selben relativen Betrag, äquivalent zueinander.
Im Beispiel könnten unsere zwei zueinander metameren Orangetöne (Bild 2 und 3) um 50 % aufgehellt werden und wären nach der Aufhellung immer noch zueinander metamer (ca. auf der Hälfte zwischen Weißpunkt und Orangepunkt).

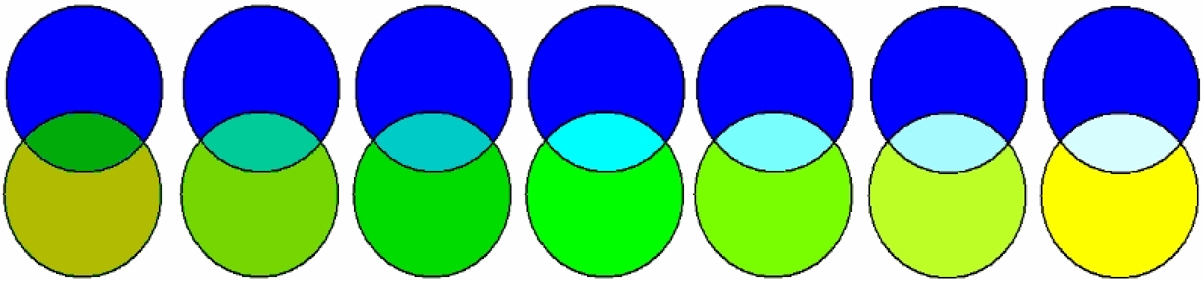
2.3.1.6.1. (Trichromazität / ***1. Grassmannsches Gesetz***) besagt, dass man mit vier verschiedenen Grundfarben immer mehrere Mischungsverhältnisse zu einer bestimmten Farbe findet, insofern überhaupt ein Mischungsverhältnis existiert und die Farbe keine Spektral- / oder eine der Grundfarben ist.
Findet man mehrere Mischungsverhältnisse, dann findet man genau betrachtet sogar unendlich viele Mischungsverhältnisse, weil vier dreidimensionale Vektoren nie zueinander linear unabhängig sein können.
Jeder Vektor lässt sich als Funktion der anderen drei und einer vorgegebenen zu mischenden Farbe darstellen.
Bsp.:



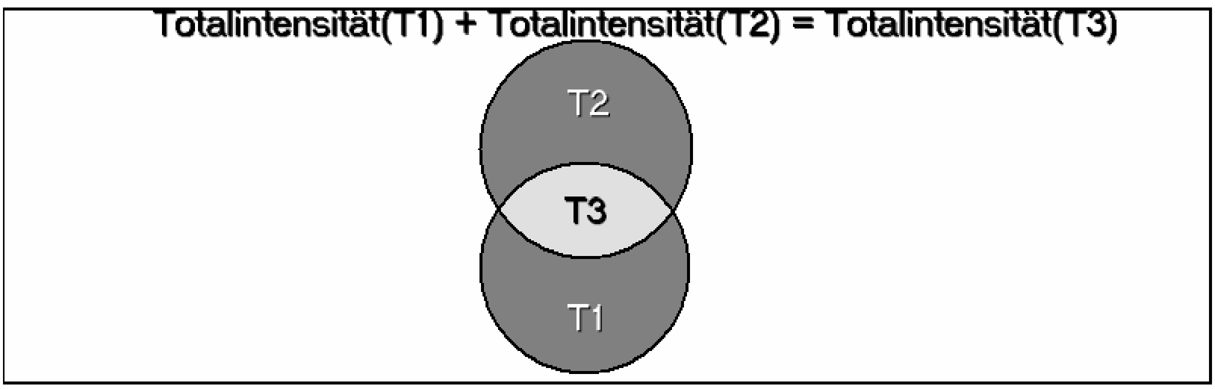
2.3.1.6.2. Mit drei Grundfarben existiert immer nur genau eine Mischungsvariante zu einer bestimmten Farbe, weil mit drei linear unabhängigen Vektoren ein dreidimensionaler Raum eindeutig aufgespannt wird. (anders ausgedrückt: der Rang des Nullvektors ist in diesem Raum = 0).
Bsp.:



2.3.1.7. illustratives Beispiel für die Stetigkeit,
2. Grassmannsches Gesetz:



2.3.1.8. illustratives Beispiel für das ***4. Grassmannsche Gesetz*** der Additivität der Totalintensitäten:



2.3.2. (Theorem 1): Besagt, man kann den nun gebildeten Vektorraum eindeutig auf einen Kegel projizieren, mit den folgenden Eigenschaften:

2.3.2.1. und *2.3.2.2.* Beschreiben die Kriterien für eine lineare Abbildung.
2.3.2.3. Die Abbildung soll eindeutig sein.
2.3.2.4. Minimalitätskriterium für den Kegel (Surjektivität).

2.3.3. (Theorem 2): Zwischen zwei auf diese Weise erzeugten Kegeln findet man eine lineare Abbildung, so dass man den einen Kegel als eine Lineartransformation des anderen auffassen kann. Im Falle von singulären Transformationen ist die Abbildung eindeutig und injektiv, weil Ursprungs und Bildkegel vertauschbar sind - bei verschiedenen Transformationsfunktionen außerdem surjektiv und damit bijektiv.

2.3.4. Grafisches Rechenbeispiel:

Grassmann wandte seine eigens entwickelten Rechenwerkzeuge der vektoriellen Addition auf die Farbenlehre an, um die Ergebnisse von Farbmischungen zu berechnen. Dabei bewies Grassmann, dass es für jede Spektralfarbe eine Gegenfarbe im Spektrum gibt, die mit der ersteren zusammen vermischt – im richtigen Verhältnis – weißes Licht ergibt.

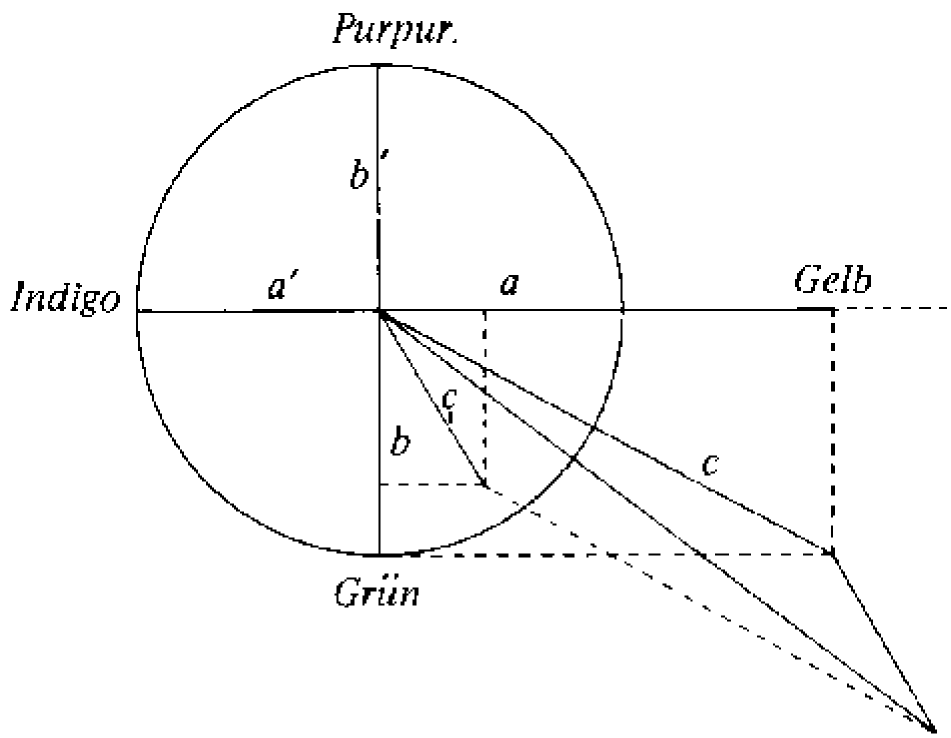


Diagramm von Grassmanns Farbmischungsberechnung mit Hilfe von Vektoren.

Quellenangabe:

Lebenslauf:

Grassmann, Gesammelte Werke – Friedrich Engel, Dritter Band, Zweiter Teil 1911

Grassmannsche Gesetze:

Zur Theorie der Farbenmischung - Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie, Bd. 89 (1) S. 69 –84 (1853)